NÚMEROS IRRACIONAIS E FRAÇÕES CONTINUADAS INFINITAS

FERNANDO FERREIRA

Todo o número irracional pode ser representado unicamente por uma fração continuada simples infinita. É este o conteúdo do seguinte resultado:

Teorema. *A aplicação de* $\mathbb{Z} \times {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N} \to \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *dada por*

$$(a_0, (a_k)_{k\in\mathbb{N}}) \rightsquigarrow [a_0, a_1, a_2, \ldots]$$

é uma bijeção.

Além disso, se se munir o produto infinito $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \ldots$ duma topologia conveniente (a topologia produto de espaços discretos) e o conjunto $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ da topologia induzida pela topologia usual de $\mathbb{R}$, a bijeção acima é mesmo um homeomorfismo.

Dado que, de acordo com o teorema acima, todo o número irracional θ é da forma $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$, com $a_0 \in \mathbb{Z}$ e $a_1, a_2, a_3, \ldots \in \mathbb{N}$, a inequação

$$\left|\theta - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b^2}$$

tem um número infinito de soluções racionais $\frac{a}{b}$, nomeadamente os convergentes $\frac{p_n}{q_n}$. Tem-se, pois, a primeira proposição da secção "Equações de Thue".

Comecemos por argumentar a injetividade da aplicação. Seja $\theta = [a_0, a_1, a_2, \ldots] = [b_0, b_1, b_2, \ldots]$, onde $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$ e $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ são números naturais. É claro que $a_0 = \lfloor\theta\rfloor$ e $b_0 = \lfloor\theta\rfloor$. Logo $a_0 = b_0$. Suponhamos, por hipótese de indução, que $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$. Pelo Facto (10), tem-se

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n, \alpha] = \theta = [b_0, b_1, \ldots, b_n, \beta] = [a_0, a_1, \ldots, a_n, \beta],$$

onde $\alpha = [a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots]$ e $\beta = [b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots]$. Pelo Facto (11) temos

$$\frac{p_n\alpha + p_{n-1}}{q_n\alpha + q_{n-1}} = \theta = \frac{p_n\beta + p_{n-1}}{q_n\beta + q_{n-1}}.$$

Logo,

$$p_nq_n\alpha\beta + p_nq_{n-1}\alpha + p_{n-1}q_n\beta + p_{n-1}q_{n-1} = p_nq_n\alpha\beta + p_nq_{n-1}\beta + p_{n-1}q_n\alpha + p_{n-1}q_{n-1}$$

e, portanto,

$$\alpha(p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n) = \beta(p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n).$$

Dado que $p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n = (-1)^{n-1}$, conclui-se $\alpha = \beta$. Como, $\lfloor\alpha\rfloor = a_{n+1}$ e $\lfloor\beta\rfloor = b_{n+1}$, vem $a_{n+1} = b_{n+1}$. Como se queria.

Antes de argumentar a sobrejetividade, vamos dar um exemplo concreto. Seja $\theta = \sqrt{3}$. Tem-se

$$\theta = 1 + (\sqrt{3} - 1) = 1 + \frac{1}{\theta_1}$$

onde

$$\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

Note-se que 1 é a parte inteira de $\sqrt{3}$ e que, portanto, $0 < \sqrt{3} - 1 < 1$ e $\theta_1 > 1$. Procedendo de modo semelhante com θ_1 tem-se

$$\theta_1 = 1 + \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}-1}{2} = 1 + \frac{1}{\theta_2}$$

onde

$$\theta_2 = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} + 1$$

Note-se que 1 é a parte inteira de $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ e que, portanto, $0 < \frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} < 1$ e $\theta_2 > 1$. Continuando com θ_2, tem-se

$$\theta_2 = 2 + ((\sqrt{3}+1) - 2) = 2 + (\sqrt{3} - 1) = 2 + \frac{1}{\theta_3}$$

onde

$$\theta_3 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

Note-se que 2 é a parte inteira de $\sqrt{3}+1$ e que, portanto, $0 < \sqrt{3} - 2 < 1$ e $\theta_3 > 1$.

Neste nosso exemplo não precisamos de ir mais longe porque $\theta_3 = \theta_1$. Pondo tudo junto, vem

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{\theta_1} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\theta_2}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\theta_3}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\theta_1}}}$$

Tem-se, pois, $\sqrt{3} = [1, \theta_1] = [1, 1, \theta_2] = [1, 1, 2, \theta_1]$. Daqui pode concluir-se (pela parte da unicidade) que $\theta_1 = [1, 2, \theta_1]$ e, de facto, que

$$\theta_1 = [1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots] = [\overline{1, 2}]$$

onde se usa o traço por cima de $1, 2$ para dizer que esta figura se repete até ao infinito. Finalmente, tem-se $\sqrt{3} = [1, \overline{1, 2}]$.

Em geral, podemos proceder como acima mas, é claro, as entradas não têm que obedecer a nenhuma periodicidade nem a nenhuma regra especial. No caso geral, não tem que acontecer que $\theta_3 = \theta_1$. A fração continuada de θ não tem que ser periódica: não tem que acontecer que $\theta_n = \theta_{n+h}$, para certos n, h inteiros não negativos ($h \geqslant 1$). Um famoso teorema de Lagrange diz que um número irracional θ tem uma representação como fração continuada simples (infinita) periódica se, e somente se, θ é raiz duma quadrática (irredutível).

À parte periodicidade, a demonstração da sobrejetividade do teorema acima procede do mesmo modo que o exemplo $\sqrt{3}$. Seja, então, θ um número irracional. Considere-se $a_0 := \lfloor \theta \rfloor$. Vem $\theta = a_0 + (\theta - a_0)$. Note-se que $a_0 < \theta < a_0 + 1$. É claro que $0 < \theta - a_0 < 1$. Tome-se $\theta_1 := \frac{1}{\theta - a_0}$. Tem-se que θ_1 é irracional, $1 < \theta_1$ e

$$\theta = a_0 + \frac{1}{\theta_1}$$

ou, escrevendo doutro modo, $\theta = [a_0, \theta_1]$.

Considere-se $a_1 := \lfloor \theta_1 \rfloor$. Vem $\theta_1 = a_1 + (\theta_1 - a_1)$. Note-se que $a_1 < \theta_1 < a_1 + 1$. É claro que $0 < \theta_1 - a_1 < 1$. Tome-se $\theta_2 := \frac{1}{\theta_1 - a_1}$. Tem-se que θ_2 é irracional, $1 < \theta_2$ e

$$\theta = a_0 + \frac{1}{\theta_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\theta_2}}$$

ou, escrevendo doutro modo, $\theta = [a_0, a_1, \theta_2]$.

Em geral, por recorrência, obtêm-se inteiros $a_0, a_1, \ldots, a_n$ (com $a_i \geqslant 1$, para $i \geqslant 1$) e um número irracional θ_{n+1} tais que $1 < \theta_{n+1}$ e $\theta = [a_0, a_1, \ldots, a_n, \theta_{n+1}]$. Vamos ver que

$$\theta = [a_0, a_1, a_2, \ldots],$$

o que mostra a sobrejetividade.

Da igualdade $\theta = [a_0, a_1, \ldots, a_n, \theta_{n+1}]$ sai, para $n \in \mathbb{N}$,

$$\theta = \frac{p_n\theta_{n+1} + p_{n-1}}{q_n\theta_{n+1} + q_{n-1}}$$

Logo,

$$|q_n\theta - p_n| = \left|\frac{q_np_n\theta_{n+1} + q_np_{n-1} - p_nq_n\theta_{n+1} - p_nq_{n-1}}{q_n\theta_{n+1} + q_{n-1}}\right| = \frac{1}{q_n\theta_{n+1} + q_{n-1}} < \frac{1}{q_n}$$

pois $|q_np_{n-1} - p_nq_{n-1}| = 1$ e $\theta_{n+1} > 1$. Também se usa o Facto (6). Conclui-se, pela observação a seguir ao Facto (7), que

$$\left|\theta - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2} \leqslant \frac{1}{n^2} \to_n 0$$

e, portanto, que $\lim_n [a_0, a_1, \ldots, a_n] = \lim_n \frac{p_n}{q_n} = \theta$. Por definição, isto quer dizer que

$$\theta = [a_0, a_1, a_2, \ldots],$$

como se queria.